استخدام بعض الطرق في إيجاد الحلول العددية للتكاملات المفردة

أ. سليمة محمد خضر

Abstract:

In this paper we study simple and composite Trapezium rule, composite $\frac{1}{3}$Simpson's rule, and composite $\frac{3}{8}$ Simpson's rule to find numerical solutions of the Single Integrations . We connect each method by a program to easily get the Solution .

All the programs in this paper written by Q. basic language .

الملخص:

تهدف هذه الورقة البحثية إلى دراسة طريقة شبه المنحرف البسيطة والتركيبة وطريقة ثلث سمسون التركيبية وطريقة الثلاث أثمان لسمسون التركيبية في إيجاد الحلول العددية للتكاملات المفردة وقد ربطنا كل طريقة ببرنامج لغرض التوصل إلى الحل بسهولة.

ولقد كتبت البرامج الموجودة في هذه الورقة باستخدام لغة Q. basic الطبعة ((4.5))

وعلى حاسبات بانتيوم ذات السرعة 600MHZ .

المقدمة:

غالبا ما نحتاج إلى حساب التكامل المحدد لدالة ليس لها علاقة عكسية صريحة للتفاضل أو يكون حساب العلاقة العكسية للتفاضل ليس سهلا.

إن مسألة إيجاد قيمة : $I = \int_a^b f(x)dx$

على فترة محددة $[\,a\,, b\,]$ هي إحدى المسائل التي تظهر كثيرا في الرياضيات.

فإذا وجدت دالة F تحقق $F' = f$ فإن $F(b) - F(a)$ هي قيمة هذا التكامل. ولسوء الحظ ، قد يكون من الصعوبة بمكان، إن لم يكن مستحيلا ، في المسائل العملية إيجاد تعبير صريح للدالة F فقد تكون الدالة f معلومة فقط عند مجموعة متفرقة من النقاط وفي هذه الحالة فإن المعالجة العددية لإيجاد التكامل تكون ضرورية.

(1) قاعدة شبة المنحرف المبسطة

SimpleTrapezium Rule

تعتبر هذه الطريقة من أبسط طرق نيوتن كوتس المغلقة للتكامل العددي، وتتلخص هذه الطريقة باستخدام صيغة نيوتن للاستكمال التقدمي كدالة تقريبية لإحلالها محل الدالة الأصلية $f(x)$ حيث ينتج عن هذا الإحلال خطأ يمكن إيجاد مقداره.

لاشتقاق قاعدة شبه المنحرف لتقريب

$$\int_a^b f(x)dx \quad \ldots. \qquad (1\text{-}1)$$

نفرض أن $h = b - a\ ,\ x_1 = b\ ,\ x_0 = a$ و

$$x = x_0 + mh\ ,(m = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ , n)$$

ونعرف صيغة نيوتن للاستكمال التقدمي كما يلي :

$$f(x_m) = f_0 + m\,\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2!} \times \Delta^2 f_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \times \Delta^3 f_0 + \ldots\ldots.., \qquad (1\text{-}2)$$

$$m = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{h} \qquad \Rightarrow dx = hdm \ldots\ldots \qquad (1\text{-}3)$$

لإيجاد حدود التكامل للمتغير الجديد m عندما $x = x_0$

$$\Rightarrow m = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0$$

وعندما $x = x_1$

$$\Rightarrow m = \frac{x_1 - x_0}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

نضع (1-2) ، (1-3) في (1-1)

$$\int_a^b f(x)dx = h\int_0^1 [\, f_0 + \; m\,\Delta\, f_0 \; + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}\right)\Delta^2 f_0$$

$$+\left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3}\right)\Delta^3 f_0 + \; \dots\dots\dots \,]\, dm$$

$$= \; h\,[\; f_0 m + \frac{m^2}{2}\,\Delta\, f_0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4}\right)\Delta^2 f_0$$

$$+\left(\frac{m^4}{24} - \frac{m^3}{6} + \frac{m^2}{6}\right)\Delta^3 f_0 + \; \dots\dots\dots\,]_0^1$$

$$= h\left[f_0 + \frac{1}{2}\Delta\, f_0 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)\Delta^2 f_0 + \; \dots\dots\dots.\right] - \; [0]$$

بما أن طريقة شبه المنحرف تأخذ جزئية واحدة.

إذا نقطع الحدود التي تبدأ من الرتبة الثانية فما فوق.

$$= h\left[f_0 + \frac{1}{2}(f_1 - f_0)\right] + \; E$$

$$= h\; \left[f_0 + \frac{1}{2}\; f_1 - \; \frac{1}{2} f_0\right] + \; E$$

$$= h\left[\frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} f_1\right] + \; E$$

$$\therefore \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0 + \; f_1] + \; E$$

حيث أن

$$E = \frac{-h}{12}\Delta^2 f_0$$

$$\therefore \; f''(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0) \;\Longrightarrow\; \Delta^2 f_0 = \; h^2 f''(x).$$

$$\therefore\ E = \frac{-h^3}{12} f''(x^*) \qquad , x^* \in (x_0 , x_1).$$

وهذا يسمى مقدار الخطأ المحلي .

وهذا ما نسميه بقاعدة شبه المنحرف المبسطة.

مثال (**1**) أوجد قيمة $\int_0^2 e^x\, dx$ باستخدام طريقة شبه المنحرف المبسطة ؟

الحل

$$h = b - a = 2 - 0 = 2$$

$$\therefore \int_0^2 e^x\, dx = \frac{2}{2}[e^0 + e^2] = 1 + 7.3890561 = 8.3890561$$

لإيجاد التكامل التحليلي : $\int_0^2 e^x\, dx = e^x|_0^2 = e^2 - e^0 = 6.38906$

∴مقدار الخطأ الحقيقي هو $2-$.

(1–1) قاعدة شبه المنحرف في الصورة التركيبية

Trapezium Rule In Composite Form

معادلة تقدير الخطأ الناتج من تطبيق قاعدة شبه المنحرف المبسطة أوضحت تحليلياً بأن مقدار الخطأ قد يكون كبيراً وبخاصة في حالة فترة التكامل $[\,a\,, b\,]$ كبيرة، ولتفادي هذه المشكلة حيث يتم تقسيم الفترة $[\,a\,, b\,]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها h أي أن

$$h = \frac{b-a}{n}$$

وقد استخدم الرمز $(m = 0,1,2 \ldots\ldots\ldots, n) \qquad x = x_0 + mh,$

للدلالة على نهايات هذه الفترات الجزئية ، $x_0 = a, x_n = b$

الآن :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{f}(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{f}(x)dx + \cdots\cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathrm{f}(x)dx\,.$$

وبتطبيق قاعدة شبه المنحرف

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\theta).$$

على كل تكامل ينتج أن

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\theta_1); \qquad x_0 < \theta_1 < x_1$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) - \frac{h^3}{12} f''(\theta_2); \qquad x_1 < \theta_2 < x_2$$

.

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) - \frac{h^3}{12} f''(\theta_n); \quad x_{n-1} < \theta_n < x_n$$

بالجمع

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_{n-1}) + f_n] - \frac{nh^3}{12} f''(\theta).$$

حيث أن

$$\theta = \min(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots \theta_n) \qquad ; a < \theta < b.$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}) + f_n] \qquad (1\text{-}4)$$

وهذا ما نسميه بقاعدة شبه المنحرف في الصورة التركيبية.

$$E = \left|-\frac{nh^3}{12} f''(\theta)\right| = \left| -(b-a)\frac{h^2}{12} f''(\theta)\right|. \qquad (1\text{-}5)$$

وهو مقدار الخطأ لقاعدة شبه المنحرف التركيبية ويسمى بالخطأ الكلي لأنه عبارة عن مجموعة الأخطاء لقاعدة شبه المنحرف على كل فترة جزئية.

مثال (2) وضح تناقص الخطأ لقاعدة شبه المنحرف ، في حساب قيمة $\int_0^2 e^x dx$, باستخدام 1 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 من الفترة الجزئية ؟

الحل

1 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{1} = 2 \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) = \frac{2}{2}[e^0 + e^2] = 8.3890561$$

2 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{2} = 1 \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) = \frac{1}{2}[e^0 + 2e^1 + e^2] = 6.9128099$$

4 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{4}\left[e^0 + 2\left(e^{1/2} + e^1 + e^{3/2}\right) + e^2\right] = 6.5216101$$

6 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{6}\left[e^0 + 2\left(e^{1/3} + e^{2/3} + e^1 + e^{4/3} + e^{5/3}\right) + e^2\right]$$

$$= 6.4481048$$

8 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{8}\Big[e^0 + 2\left(e^{1/4} + e^{1/2} + e^{3/4} + e^1 + e^{5/4} + e^{3/2} + e^{7/4}\right) + e^2\Big] = 6.4222978$$

10 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{10} = \frac{1}{5} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{10}\left[e^0 + 2\left(e^{1/5} + e^{2/5} + e^{3/5} + e^{4/5} + e^1 + e^{6/5} + e^{7/5} + e^{8/5} + e^{9/5}\right) + e^2\right] = 6.4038387$$

12 من الفترات الجزئية $\leftarrow h = \frac{2-0}{12} = \frac{1}{6}$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{12}\left[e^0 + 2\left(e^{1/6} + e^{2/6} + e^{3/6} + e^{4/6} + e^{5/6} + e^1 + e^{7/6} + e^{8/6} + e^{9/6} + e^{10/6} + e^{11/6}\right) + e^2\right] = 6.4038387$$

القيمة المضبوطة للتكامل هي : $\int_0^2 e^x dx = e^x \big|_0^2 = e^2 - e^0 = 6.3890561$

وبالتالي فإن الأخطاء المناظرة تكون على الترتيب هي

$$-2.000000, -0.5237538, -0.13325540, -0.0590487, -0.0332417, -0.\,0212827, -0.0147826.$$

وهي تتناقص ، بمعامل قدره 4 تقريباً عندما تتضاعف الفترات الجزئية.

واستخدمنا برنامج وتحصلنا على الحل بطريقة أسهل و النتائج موضحة في الجدول (1).

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	الفترات الجزئية
-2	6.3890561	8.3890561	1
-0.5237536	6.3890561	6.9128099	2
-0.1325541	6.3890561	6.5216101	4
$-5.904865E-02$	6.3890561	6.448105	6
$-3.324175E-02$	6.3890561	6.422298	8
$-2.128267E-02$	6.3890561	6.410339	10
$-1.478338E-02$	6.3890561	6.40384	12

جـــــــــدول (1)

(نتائج طريقة شبه المنحرف بفترات جزئية مختلفة)

2) قاعدة ثلث سمسون في الصورة التركيبة

1/3 Simpson 's Rule In Composite Form.

لإيجاد قاعدة ثلث سمسون التركيبية تقسم الفترة $[\,a\,,b\,]$ إلى عدد زوجي 2m من الفترات الجزئية المتساوية الطول ، طول كل منها، h أي أن

$h=\frac{b-a}{n}$ حيث $n=2m$ ،n عدد زوجي .

وقد استخدم الرمز $(m=0,1\ldots n)$ $\quad x=x_0+mh.$

للدلالة على نهايات هذه الفترات الجزئية ، $x_0=a\;,\;x_n=b$

الآن :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots\dots.. + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx.$$

ويمكن إيجاد قاعدة ثلث سمسون بنفس طريقة اشتقاق شبه المنحرف وبتطبيق قاعدة ثلث سمسون

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\theta).$$

على كل تكامل ينتج أن

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\theta_1).$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\theta_2).$$

.

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\theta_n).$$

بالجمع :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1})$$

$$+ 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{n-2}) + f_n] - \frac{nh^5}{180} f^{(4)}(\theta).$$

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1})$$

$$+2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{n-2}) + f_n] \qquad (1-6)$$

$$E = \left| \frac{-nh^5}{180} f^{(4)}(\theta) \right| = \left| -(b-a)\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\theta) \right| ,\theta \in (a,b). \qquad (1-7)$$

وهو مقدار الخطأ لقاعدة سمسون التركيبية و يسمى بالخطأ الكلي .

وهذا ما نسميه بقاعدة ثلث سمسون في الصورة التركيبية .

مثال (**3**) وضح تناقص الخطأ لقاعدة ثلث سمسون، في حساب قيمة $\int_0^2 e^x \, dx$ ، باستخدام 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10 ، 12 من الفترة الجزئية ؟

الحل

2 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{2} = 1 \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{1}{3}[e^0 + 4e^1 + e^2] = 6.4207278$$

4 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{6}\left[e^0 + 4\left(e^{1/2} + e^{3/2}\right) + 2e^1 + e^2\right] = 6.3912102$$

6 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{9}\left[e^0 + 4\left(e^{1/3} + e^1 + e^{5/3}\right) + e^{2/3} + e^{4/3}\right) + e^2\right]$$

$$= 6.3894886$$

8 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{12}\left[e^0 + 4(e^{1/4} + e^{3/4} + e^{5/4} + e^{7/4}) + 2\left(e^{1/2} + e^1 + e^{3/2}\right) + e^2\right] = 6.3891937$$

10 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{10} = \frac{1}{5} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{15}\Big[e^0 + 4(e^{1/5} + e^{3/5} + e^1 + e^{7/5} + e^{9/5})$$
$$+ 2\left(e^{2/5} + e^{4/5} + e^{6/5} + e^{8/5}\right) + e^2\Big] = 6.3891126$$

12 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{12} = \frac{1}{6} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{18}\Big[e^0 + 4(e^{1/6} + e^{3/6} + e^{5/6} + e^{7/6} + e^{9/6} + e^{11/6})$$
$$+ 2\left(e^{1/3} + e^{2/3} + e^1 + e^{4/3} + e^{5/3}\right) + e^2\Big]$$
$$= 6.3890834$$

وبما أن القيمة المضبوطة للتكامل هي 6.3890561، وبالتالي فإن الأخطاء المناظرة تكون على الترتيب هي : $-0.0316717, -0.0021541, -0.0004325, -0.0001376,$ $-0.0000565, -0.0000273$.

وهي تتناقص بمعامل قدره 16 تقريباً عندما تتضاعف الفترات الجزئية .

واستخدمنا برنامج وتحصلنا على الحل بطريقة أسهل و النتائج موضحة في الجدول (2).

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	الفترات الجزئية
−3.167152E − 02	6.3890561	6.420728	2
−2.153873E − 03	6.3890561	6.39121	4
−4.324913E − 04	6.3890561	6.389489	6
−1.373291E − 04	6.3890561	6.389194	8
−5.674326E − 05	6.3890561	6.389113	10
−2.765656E − 05	6.3890561	6.389084	12

جـــــــدول (2)

(نتائج طريقة سمسون بفترات جزئية مختلفة)

3) قاعدة الثلاث أثمان لسمسون في الصورة التركيبية

3/8 Simpson 's Rule In Composite Form.

لإيجاد قاعدة الثلاث أثمان لسمسون في الصورة التركيبية تقسم الفترة $[\,a\,,b\,]$ إلى 3m من الفترات الجزئية المتساوية الطول، طول كل منها، h أي أن

$h=\frac{b-a}{n}$ حيث $n=3m$، n عدد يقبل القسمة على 3 .

وقد استخدم الرمز $(m=0,1,\dots,n)$ ، $x=x_0+mh$

للدلالة على نهايات هذه الفترات الجزئية و $x_0=a$,$x_n=b$

الآن :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx+\int_{x_3}^{x_6} f(x)dx+\dots\dots+\int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx.$$

ويمكن إيجاد قاعدة الثلاث أثمان لسمسون بنفس طريقة اشتقاق شبه المنحرف وبتطبيق قاعدة الثلاث أثمان لسمسون

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\theta).$$

على كل تكامل ينتج أن

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\theta_1).$$

$$\int_{x_3}^{x_6} f(x)dx=\frac{3h}{8}(f_3+3f_4+3f_5+3f_6)-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\theta_2).$$

.

$$\int_{xn-3}^{x_n} \mathrm{f}(x)dx = \frac{3h}{8}(f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$$
$$-\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\theta_n).$$

بالجمع :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \frac{3h}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \cdots$$
$$+ 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n] - \frac{nh^5}{80} f^{(4)}(\theta).$$

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \frac{3h}{8}\begin{bmatrix} f_0 + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + \cdots) \\ +2(f_3 + f_6 + \cdots) + f_n \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

$$E = \left| \frac{-nh^5}{80} f^{(4)}(\theta) \right| = \left| -(b-a)\frac{h^4}{80} f^{(4)}(\theta) \right|$$
$$;\theta \in (a,b). \quad (1-9)$$

وهو مقدار الخطأ لقاعدة الثلاث أثمان لسمسون التركيبية و يسمى بالخطأ الكلي .

وهذا ما نسميه بقاعدة الثلاث أثمان لسمسون في الصورة التركيبية .

مثال (4) وضح تناقص الخطأ لقاعدة الثلاث أثمان لسمسون، في حساب قيمة $\int_0^2 e^x\,dx$ باستخدام 3 ، 6 ، 9 ، 12 من الفترة الجزئية ؟

الحل

3 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 3f_3)$$
$$= \frac{1}{4}\left[e^0 + 3\left(e^{2/3} + e^{4/3}\right) + e^2\right] = 6.4033155.$$

6 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{8}\left[e^0 + 3\left(e^{1/3} + e^{2/3} + e^{4/3} + e^{5/3}\right) + 2e^1 + e^2\right]$$
$$= 6.3900166$$

9 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{9} = \frac{2}{9} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{12}\Big[e^0 + 4\left(e^{2/9} + e^{4/9} + e^{8/9} + e^{10/9} + e^{14/9} + e^{16/9}\right) + (e^{2/3} + e^{4/3}) + e^2\Big] = 6.3892486.$$

12 من الفترات الجزئية $h = \frac{2-0}{12} = \frac{1}{6} \leftarrow$

$$\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{16}\Big[e^0 + 3(e^{1/6} + e^{2/6} + e^{4/6} + e^{5/6} + e^{7/6} + e^{7/6} + e^{8/6} + e^{10/6} + e^{11/6}) + 2\left(e^{1/2} + e^1 + e^{3/2}\right) + e^2\Big] = 6.3891173.$$

وبما أن القيمة المضبوطة للتكامل هي 6.38790561، وبالتالي فإن الأخطاء المناظرة تكون على الترتيب هي :

$$-0.0142594, -0.0009605, -0.0001925, -0.0000612 .$$

وهي تتناقص بمعامل قدره 16 تقريباً عندما تتضاعف الفترات الجزئية .

واستخدمنا برنامج وتحصلنا على الحل بطريقة أسهل و النتائج موضحة في الجدول (3).

الفترات الجزئية	القيمة العددية	القيمة المضبوطة	مقدار الخطأ
3	6.403316	6.3890561	$-1.425982E-02$
6	6.390017	6.3890561	$-9.608269E-04$
9	6.389249	6.3890561	$-1.926422E-04$
12	6.389118	6.3890561	$-6.151199E-05$

جـــــــــدول (3)

(نتائج طريقة 8 / 3 سمسون بفترات جزئية مختلفة)

الخاتمة

لقد تطرقنا في هذه الورقة البحثية إلى دراسة ثلاث طرق وهي طريقة شبه المنحرف البسيطة والتركيبية وطريقة ثلث سمسون التركيبية وطريقة الثلاث أثمان لسمسون التركيبية ووضحنا كيفية إيجاد الحلول العددية للتكاملات المفردة وذلك بربط كل طريقة ببرنامج للتوصل إلى الحل بسهولة.

ومن خلال النتائج التي تحصلنا عليها من هذه الطرق نستنتج أن نتائج الأخطاء التي حصلنا عليها باستخدام قاعدة ثلث سمسون بعد أخد القيمة المطلقة تكون أقل النتائج من تلك الأخطاء التي حصلنا عليها باستخدام قاعدة شبه المنحرف وقاعدة الثلاث أثمان لسمسون للعدد نفسه (6) والعدد نفسه (12) من حسابات قيمة الدالة.

وبالتالي تكون قاعدة ثلث سمسون هي الأفضل لأن نتائجها تكون أكثر دقة.

العيب الأساسي لقاعدة ثلث سمسون التركيبية هو أن استخدامها يقتصر فقط على تقسيم الفترة $[a, b]$ إلي عدد زوجي من الفترات الجزئية .

والنتائج التي تحصلنا عليها وضحناها كالتالي :

عندما تكون 6 من الفترات الجزئية .

الطريقة \ النتائج	الحل العددي	الحل التحليلي	مقدار الخطأ
شبه المنحرف	6.4481048	6.3890561	−0.0590487
1/3 سمسون	6.3894886	6.3890561	−0.0004325
3/8 سمسون	6.3900166	6.3890561	−0.0009605

جدول (4)

مقارنة بين صيغ نيوتن كوتس والحل التحليلي ($n = 6$)

عندما تكون 12 من الفترات الجزئية .

الطريقة \ النتائج	الحل العددي	الحل التحليلي	مقدار الخطأ
شبه المنحرف	6.4038387	6.3890561	−0.0147826
1/3 سمسون	6.3890834	6.3890561	−0.0000273
3/8 سمسون	6.3891178	6.3890561	−0.0000612

جدول (5)

مقارنة بين صيغ نيوتن كوتس والحل التحليلي ($n = 12$)

ومن هذا تم التوصل إلى مجموعة من الاستنتاجات وهي :

(1) طريقة ثلث سمسون التركيبية أفضل من طريقة شبه المنحرف التركيبية وطريقة الثلاث أثمان لسمسون التركيبية وذلك من خلال النتائج .

(2) كلما زادت عدد الفترات الجزئية كلما كان النتائج أكثر دقة .

(3) عند استخدام حدود تكامل سالبة في التكاملات المفردة تعطي نتائج غير مضبوطة .

(4) استعمال التحليل العددي في حل التكاملات المفردة يعمل على زيادة السرعة والدقة.

المراجع

المراجع العربية :

1ـ أيان جاكس وكولن جد، ترجمة (علي محمد إبراهيم ، محمد ماهر علي النجار)، التحليل العددي، منشورات جامعة الفاتح، 1992 م.

2ـ دوغلاس فايرس وريتشارد بير دسن، ترجمة (رمضان محمد جهيمة، كمال أبو القاسم أبودية)، التحليل العددي، منشورات ELGA، 2001 م.

المراجع الأجنبية :

1- F. G. Curtis and O. W. Patrick, Applied Numerical Analysis, 5rd edition. Copyright, 1994.